Mathematik

- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite
- Herleitungen und Begründungen ausführlich und klar dokumentieren
- Die Darstellung ist Teil der Bewertung
- Resultate: Wahrscheinlichkeiten: Prozentwerte, gerundet auf 2 Dezimalen
Winkel: Gradwerte, gerundet auf 2 Dezimalen
Restliche Resultate: Exakt
- Hilfsmittel: Formeln und Tafeln DMK/DPK
Taschenrechner TI 89

1. Aufgabe

a) Bestimmen Sie die Parameter a, b und c so, dass der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx}{3x + c}$ die Extremalstelle E(3/3) und den Pol x = 1 hat.

b) Diskutieren Sie die erhaltene Funktion (Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Pole, Asymptoten, Extrema, Wendepunkte, y' mit Herleitung, y" mit Taschenrechner) und skizzieren Sie den Graphen der Funktion mit sinnvoller Wahl der Einheiten.

2. Aufgabe

Bei Labradorhunden ist die Farbe bei Geburt (schwarz oder gelb) genetisch festgelegt. Dabei ist schwarz (S) dominant und gelb (g) rezessiv.
Die Labradorhündin Aïda hat die Farberbanlage (Allel) Sg, ebenso wie der Vater Cosby.
Dies bedeutet, dass für Hundenachkommen von Aïda und Cosby die Wahrscheinlichkeit für die Farbe schwarz $p = \dfrac{3}{4}$ (SS,Sg und gS) und für die Farbe gelb $q = \dfrac{1}{4}$ (gg) beträgt.
Aïda bringt am 18. März 2003 acht Junge zur Welt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl das erstgeborenen als auch das zweitgeborene Hundebaby schwarz ist.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 der 8 Hundebabys gelb sind.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 1 Hundebaby gelb ist.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 4 Hundebabys schwarz sind.

e) Wie viele Junge sind in einem Wurf von Hundeeltern mit je der Farberbanlage Sg mindestens nötig, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens ein gelbes Hundebaby dabei ist?

3. Aufgabe

a) Der Kreises k hat den Mittelpunkt M(3/–1) und die Gerade a: $3x + 4y - 30 = 0$ als Tangente.
Bestimmen Sie die Gleichung des Kreises k.

b) Zeichnen Sie den Kreis k, die Tangente a: $3x + 4y - 30 = 0$ und den Punkt A(–7/–6) in ein Koordinatensystem ein und legen Sie die Tangenten b und c vom Punkt A an den Kreis k.
Berechnen Sie die Gleichungen der Tangenten b und c.

c) Die Tangente a wird parallel auf die andere Seite des Kreises k verschoben.
Berechnen Sie die Gleichung der verschobenen Tangente a'.

d) Bestimmen Sie die Gleichung des Inkreises des durch die Geraden a', b und c begrenzten Dreiecks.

4. Aufgabe

In einer Urne A sind x weisse, 35 blaue und 10 rote Kugeln; in einer Urne B 2x weisse, 30 blaue und 60 rote Kugeln. Man zieht aus jeder Urne eine Kugel.

a) Berechnen Sie die Anzahl x der weissen Kugeln in Urne A, wenn die Wahrscheinlichkeit, eine rote und eine blaue Kugel zu ziehen, $\frac{12}{25}$ beträgt.

b) Nachdem einige weisse Kugel hinzugefügt worden sind, beträgt die Gesamtanzahl der weissen Kugeln 75. Sie dürfen nun die 75 weissen Kugeln beliebig neu auf die Urnen A und B aufteilen. Wie viele weisse Kugeln müssen in der Urne A sein, damit die Wahrscheinlichkeit, eine rote und eine blaue Kugel zu ziehen
b1) maximal
b2) minimal
wird (die blauen und roten Kugeln bleiben dabei unverändert)?
Bestimmen Sie auch diese maximale und minimale Wahrscheinlichkeit.

5. Aufgabe

Gegeben sind die Punkte A(2/–1/0), X(10/8/–5), Y(–6/10/–15), S(7/7/8) und M(6/0/1).

a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene Ω bestimmt durch die Punkte A, X und Y.

b) Berechnen Sie den Neigungswinkel der Geraden g = (AS) bezüglich der Ebene Ω.

c) S ist die Spitze einer Pyramide ABCDS mit quadratischer Grundfläche ABCD in der Ebene Ω .
(Der Eckpunkt A und der Diagonalenschnittpunkt M des Grundflächenquadrats ABCD sind die am Anfang der Aufgabe gegebenen Punkte.)
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCDS.

d) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte B, C und D.

6. Aufgabe

2 unabhängige Teilaufgaben

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte und die Schnittwinkel der Kurven mit den Gleichungen
$y = f_1(x) = e^x$ und $y = f_2(x) = x^2 \cdot e^x$.

b) Gegeben sind die Funktionen mit den Gleichungen
$y = f_1(x) = \cos(x)$ und $y = f_2(x) = \sin(2x)$.
b1) Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen für $0 \le x \le \pi$.
b2) Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Kurven im Intervall $[0,\pi]$.
b3) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche begrenzt durch die Graphen von f_1 und f_2 zwischen den beiden ersten Schnittpunkten des Intervalls $[0,\pi]$.